جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2015 - 2016
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

السؤال الأول (42 درجة):
اجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) مميز الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 15 يساوي 10.
(2) الحلقة $(Z_{15}, +, \cdot)$ تحقق خاصية الاختصار.
(3) المثالية 2Z حد مباشر في حلقة الأعداد الصحيحة Z.
(4) إن حلقة الخارج $4Z/_{20Z}$ ليست واحدية.
(5) إن عدد عناصر حلقة الخارج $Z_{12}/_{6Z_{12}}$ يساوي عنصرين فقط.
(6) إذا كانت $A = 3Z,\ B = 6Z$ مثاليتين في Z، فإن $A.B = A \cap B$.
(7) ان العنصر $(1, 3)$ جامد وقاسم للصفر في الحلقة $Z_3 \oplus Z_5$.
(8) إن المثالية $< 5 >$ أعظمية في الحلقة Z_{25}.
(9) إذا كانت $R = Z_{12}$ فإن $J(R) = <0>$.
(10) إذا كانت $B = <12>$ مثالية في حلقة الأعداد الصحيحة Z فإن $\mathrm{rad}\, B = <4>$.
(11) إذا كانت $A = 4Z,\ B = 6Z$ مثاليتين في الحلقة Z، فإن $A : B = 12Z$.
(12) المثالية الصفرية أولية في الحلقة $(Z_{15}, +, \cdot)$.
(13) إذا كانت $R = Z_{24}$ فإن $\mathrm{rad}\, R = <3>$.
(14) إن الحدودية $f(x) = x^3 + x + 1$ هي حدودية أولية فوق Z_3.

السؤال الثاني (48 درجة): أثبت صحة ما يلي: لتكن R حلقة.

(1) إذا كانت R تبديلية و $a, b \in R$ وكان الجداء $a\,.\,b$ قاسماً للصفر فإنه إما a قاسم للصفر أو b قاسم للصفر.
(2) إذا كانت R تحقق $a^2 = a$ لكل $a \in R$ فإن R تكون تبديلية.
(3) إذا كانت R, S حلقتين واحديتين و $f : R \to S$ تشاكل حلقي غامر فإن $f(1_R) = 1_S$.
(4) إذا كانت الحلقة R تحوي مثالية يسارية عديمة القوة مغايرة للصفر فإنها تحوي مثالية عديمة القوة مغايرة للصفر.
(5) إن $J(R)$ مثالية صغيرة في الحلقة R وهي أكبر مثالية صغيرة في الحلقة R.
(6) إذا كانت A, B مثاليتين يساريتين في R فإن المجموعة $(A:B)=\{x : x\in R ; x.B\subseteq A\}$ تشكل مثالية في R.

السؤال الثالث (10 درجات):
لتكن R حلقة واحدية و A مثالية يسارية في R. أثبت أنه توجد في R مثالية يسارية أعظمية تحوي A.

2016 - 7 - 14

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الفوحة

①

سلم تصحيح اسئلة مقرر البنى الجبرية/2/ سنة رياضيات

فصل ثاني لعام 2015 - 2016

الجواب الأول $\boxed{42 \text{ درجة}}$ لكل بند 3 درجات

1) خطأ، 5 .

2) خطأ، لأن 2 ليس جامد في Z .

3) خطأ لأن Z_{15} ليست حلقة تامة .

4) خطأ واحدية الحيادي $16+20Z$.

5) خطأ 6 عناصر .

6) خطأ لأن $A+B=3Z \neq Z$

7) صح

8) صح

9) $J(R)=\langle 6 \rangle$

10) $radB=\langle 6 \rangle=6Z$

11) خطأ $2Z$.

12) خطأ Z_{15} ليست منطقة تكاملية . أو 15 ليس أولي .

13) خطأ، $radR=\langle 6 \rangle$.

14) خطأ، $1 \in Z_3$ جذر لها .

الجواب الثاني $\boxed{48 \text{ درجة}}$

(1) بما أن (ab) قاسم للصفر في R، فإنه يوجد $0 \neq c \in R$ يحقق $(ab)c=0$

③ إذا كان a ليس قاسماً للصفر عندئذ $bc=0$ وبما أن $c \neq 0$ فإن b قاسم الصفر وهو المطلوب .

(2) من جهة أولى ومن كون $a^2=a$ يكون $a=-a$ حيث $(a+a)^2=a+a$

④ ومنه $a^2+a+a+a=a+a \Leftarrow a=-a$

Scanned by CamScanner

②

كما أنه لأجل كل $a,b\in R$

$$(a+b)^2 = a+b \Rightarrow a^2+ab+ba+b^2 = a+b \Rightarrow$$

$$(a^2=a) \qquad a+ab+ba+b = a+b \Rightarrow$$

$$ab+ba=0 \Rightarrow \underline{ab} = -ba = \underline{ba}$$

R تبديلية .

(3) بما أن f غامر فانه يوجد $x\in R$ يحقق $f(x)=1_S$ وبما أن $1_R\in R$

فاننا نفرض ⑨ $f(1_R)=y$ ومنه

$$1_S = f(x) = f(1_R.x) = f(1_R)f(x) = y1_S = y = f(1_R)$$

(4) لنفرض ان R تحوي مثالية يسارية عدية القوة A مغايرة الصفر عندئذ

يوجد $n\in N^*$ يحقق $A^n=0$ ، بما أن A مثالية يسارية من R فان AR

مثالية من R ⑨ وعندئذ :

- اذا كان $AR\neq 0$ فان

$$(AR)^n = \underbrace{(AR)\cdot\ldots(AR)}_{n \text{ مرة}} = A\underbrace{(RA)\ldots(RA)}_{n-1 \text{ مرة}}R \subseteq A\underbrace{(A\cdot A\cdots A)}_{n-1 \text{ مرة}}R =$$

$$A^nR = 0R = 0 \Rightarrow (AR) \text{ مثالية عدية القوة}$$

- وإذا كان $AR=0$ عندئذ A مثالية يمينية في R لأنه أيا كان $r\in R, a\in A$

فان $ar\in AR=0\in A$ ومنه A مثالية عدية القوة لأن $A^n=0$.

(5) إذا كانت D مثالية من R تحقق $D+J(R)=R$ عندئذ يوجد $r\in J(R)$

و $a\in D$ بحيث $a+r=1$ ومنه $1-a=r\in J(R)$ ومنه

$1-(1-a)=a$ قابل للقلب من اليسار من R أي $1\in D$ ومنه

⑤ $D=R$ أي $J(R)$ مثالية صغرى من R . وبما أن أي مثالية صغرى من

R تكون محتواة من $J(R)$ فان $J(R)$ اكبر مثالية صغرى من R.

3

(6) بما أن $0B = 0 \in A$ فان $\phi \neq (A:B) \subseteq R$

ليكن $x, y \in (A:B)$ عندئذ $xB, yB \subseteq A$. ليكن

$z \in (x-y)B$ عندئذ يوجد $b \in B$ حيث $z = (x-y)b$ ومنه

$z = (x-y)b = xb - yb \in A$ وبالتالي نجد $z \in A$ ومنه $(x-y)B \subseteq A$

أي $x - y \in A:B$ ، ليكن $r_1, r_2 \in R$ و $x \in A:B$ ولنثبت

ان $r_1 x r_2 \in A:B$. ليكن $z \in (r_1 x r_2)B$ عندئذ $c \in B$ بحيث

$z = (r_1 x r_2)c$ وبما أن B مثالية يسارية في R فان $r_2 c \in B$ وبما أن

$x \in A:B$ نجد $x(r_2 c) \in xB \subseteq A$ ومنه

$z = (r_1 x r_2)c = r_1(x r_2 c) \in r_1 A \subseteq A \Rightarrow r_1 x r_2 \in A:B$

الجواب الثالث (15 درجات)

$A \neq R$ مثالية يسارية في R ولنأخذ المجموعة:

$T = \{B : B$ مثالية يسارية في R و $A \subseteq B \neq R\}$ نجد $T \neq \phi$ لأن $A \in T$ و T

مرتبة جزئياً وفق $\subseteq$. اذا كانت T_0 مجموعة جزئية من T $\neq \phi$ ومرتبة كلياً

عندئذ $K = \bigcup_{B \in T_0} B$ مثالية يسارية في R وتحوي A كما أن $K \neq R$ لأنه

5

اذا كانت $K = R$ فان $1 \in K = \bigcup_{B \in T_0} B$ ومنه يوجد $D \in T_0$ حيث $1 \in D$

ويكون $D = R$ وهذا يناقض $D \in T_0 \subseteq T$ اذاً $K \neq R$ ومنه $K \in T$

ان K هو حد أعلى للمجموعة T_0 في T وحسب تمهيدية زورن يوجد في T عنصر

2

أعظمي وليكن M أي M مثالية يسارية أعظمية في R تحوي A.

انتهت الأجوبة

تاريخ الامتحان 2016/7/14

د. إيمان الخوجة